Άσκηση: Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_1 = 17$ και $x_{n+1} = \sqrt{x_n - 1} + 1$

Να αποδείξετε ότι συγκλίνει και να βρείτε το όριό της.

Απόδειξη: Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $x_n \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

__1ο επαγωγικό βήμα:__ $x_1 = 17 \geq 1$ οπότε για $n=1$ ισχύει.

__γενικό επαγωγικό βήμα:__ $x_n \geq 1 \Rightarrow x_n - 1 \geq 0 \Rightarrow$ ορίζεται $\sqrt{x_n - 1}$ και $\sqrt{x_n - 1} \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x_n - 1} + 1 \geq 1$, οπότε ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $x_{n+1} \leq x_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

__1ο επαγωγικό βήμα:__ για $n=1$ $x_2 = 5$ οπότε $x_2 \leq x_1$ Άρα, ισχύει.

__γενικό επαγωγικό βήμα:__ Υποθέτουμε ότι $x_{n+1} \leq x_n$

$x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_{n+1} - 1 \leq x_n - 1 \Rightarrow \sqrt{x_{n+1} - 1} \leq \sqrt{x_n - 1} \Rightarrow \sqrt{x_{n+1} - 1} + 1 \leq \sqrt{x_n - 1} + 1 \Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$,

οπότε ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, η ακολουθία είναι φθίνουσα.

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη θα είναι συγκλίνουσα. Θέτουμε $\lim x_n = x$

$x_n \to x \Rightarrow \underline{x_{n+1} \to x}$.

$x_n \to x \Rightarrow x_n - 1 \to x - 1 \Rightarrow \sqrt{x_n - 1} \to \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x_n - 1} + 1 \to \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow$

$\underline{x_{n+1} \to \sqrt{x-1} + 1}$.

Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έχω: $x = \sqrt{x-1} + 1 \Leftrightarrow$

$$x - 1 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ (x-1)^2 = (x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)(x-1-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{cases}$$

Δείχνουμε με επαγωγή ότι $x_n \geq 2 \; \forall n \in \mathbb{N}$

__1ο επαγωγικό βήμα:__ $x_1 = 17 \geq 2$ ισχύει

__γενικό επαγωγικό βήμα:__ Υποθέτουμε ότι $x_n \geq 2 \Rightarrow x_n - 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_n - 1} \geq 1 \Rightarrow$

$\sqrt{x_n - 1} + 1 \geq 2 \Rightarrow x_{n+1} \geq 2$, οπότε ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον $x_n \to x$ συμπεραίνουμε ότι $x \geq 2$

Συνεπώς, εφόσον αποδείξαμε πως $x = 1$ ή $x = 2$), προκύπτει $x = 2$

Άρα, $\lim x_n = 2$.

Άσκηση: Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1=5$ και $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n}$.
Να εξεταστεί αν είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

Απόδειξη: Εύκολα, $a_n \geq 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n} \geq \sqrt{a_n^2}=|a_n|=a_n$.

Άρα, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.

Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι η a_n είναι άνω φραγμένη.

Τότε, ως αύξουσα και άνω φραγμένη θα είναι συγκλίνουσα.

Θέτουμε $x=\lim a_n$ $\quad a_n\to x \Rightarrow \underline{a_{n+1}\to x}$

$$a_n\to x \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_n^2\to x^2 \\ a_n\to x\end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n^2+a_n\to x^2+x \Rightarrow \sqrt{a_n^2+a_n}\to\sqrt{x^2+x} \Rightarrow \underline{a_{n+1}\to\sqrt{x^2+x}}$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έχουμε: $x=\sqrt{x^2+x} \Rightarrow x^2=x^2+x \Rightarrow x=0$

Εφόσον η a_n είναι αύξουσα και $a_1=5$ προκύπτει $a_n\geq 5 \ \forall n\in\mathbb{N}$

Άρα και $x\geq 5$, δηλαδή $0\geq 5$. Άτοπο!

Επομένως, η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη αλλά είναι αύξουσα, άρα $\lim a_n=+\infty$

➤ Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία με $a_n\neq 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

α) Αν $a_n\to+\infty$ τότε $\frac{1}{a_n}\to 0$

β) Αν $a_n\to-\infty$ τότε $\frac{1}{a_n}\to 0$

γ) Αν $a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ και $a_n\to 0$ τότε $\frac{1}{a_n}\to+\infty$

δ) Αν $a_n<0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ και $a_n\to 0$ τότε $\frac{1}{a_n}\to-\infty$

$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} A=B^2 \\ A\geq 0 \\ B\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} A=B^2 \\ B\geq 0\end{cases}$

Απόδειξη: Εύκολα από τους ορισμούς.

Εφαρμογή: Αν $a>1$ τότε $a^n\to+\infty$

Απόδειξη: 1ος τρόπος: έχουμε $0<\frac{1}{a}<1$. Άρα $\lim\left(\frac{1}{a}\right)^n=0 \xrightarrow{\gamma)} \lim\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}=+\infty$

δηλαδή $\lim a^n=+\infty$.

2ος τρόπος: (άμεσα)

$a>1 \Rightarrow a=1+\theta$ με $\theta>0$

$\underline{a^n}=(1+\theta)^n\geq 1+\theta n>\underline{\theta n}$ Εφόσον $\lim\theta n=+\infty$ προκύπτει $\lim a^n=+\infty$

Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία με $a_n\neq 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

α) Αν $a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to \ell$ με $\ell>1$ τότε $\lim a_n=+\infty$

β) Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\ell$ με $\ell<1$ τότε $\lim a_n=0$.

Απόδειξη

α) Επιλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\ell > \lambda > 1$

Εφόσον $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ από τον ορισμό για $\varepsilon = \ell - \lambda > 0$ προκύπτει ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

για $n \geq n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon = \ell - (\ell - \lambda) = \lambda$.

Έτσι $a_{n_0+1} \geq \lambda \cdot a_{n_0}$

$a_{n_0+2} \geq \lambda a_{n_0+1} \geq \lambda^2 \cdot a_{n_0}$

$a_{n_0+3} \geq \lambda^3 \cdot a_{n_0}$

$\vdots$

γενικά $a_{n_0+k} \geq \lambda^k \cdot a_{n_0}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (με επαγωγή)

ν-οστός όρος.

Έτσι, $\forall n > n_0$: $a_n = a_{n_0+(n-n_0)} \geq \lambda^{n-n_0} \cdot a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\right) \lambda^n$

Εφόσον $\lambda > 1$: $\lambda^n \to +\infty$ Άρα, η $a_n \to +\infty$.

β) Επιλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\ell < \lambda < 1$

Εφόσον $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$ από τον ορισμό για $\varepsilon = \lambda - \ell > 0$ προκύπτει ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

για $n \geq n_0$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \varepsilon = \lambda$.

Έτσι $|a_{n_0+1}| < \lambda |a_{n_0}|$

$|a_{n_0+2}| < \lambda |a_{n_0+1}| < \lambda^2 |a_{n_0}|$

$\vdots$

γενικά $|a_{n_0+k}| < \lambda^k |a_{n_0}|$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (με επαγωγή)

ν-οστός όρος

Έτσι, $\forall n > n_0$: $|a_n| < \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}| = \left(\frac{|a_{n_0}|}{\lambda^{n_0}}\right) \lambda^n$

Εφόσον $0 < \lambda < 1$: $\lambda^n \to 0$. Άρα, $|a_n| \to 0$ Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $a_n \to 0$.

Εφαρμογή: Έστω $0 < \theta < 1$, θεωρούμε $a_n = n^8 \theta^n$

Έχουμε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^8 \theta^{n+1}}{n^8 \theta^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 \theta \to \theta < 1$ Άρα, $a_n \to 0$.

Παράδειγμα: $a_n = \frac{y^n}{n!}$ όπου $y \in \mathbb{R}$. Να βρούμε αν συγκλίνει και το όριό της.

Απόδειξη $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|y|^n}{n!}} = \frac{|y|}{n+1} \to 0$ Άρα, $a_n \to 0$.

Άσκηση για το σπίτι:

Να βρούμε τα όρια των ακολουθιών:

1) $x_n = \sqrt{3^n + 5^n + 9^n}$

2) $x_n = \dfrac{3^n + 7^n}{7^n + 8^n}$

3) $x_1 = 10$ και $x_{n+1} = \sqrt{5x_n}$

4) $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

5) i) Αν $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών (a_n) με $a_n \to x$.

ii) Αν $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία ρητών (a_n) με $a_n \to x$.